

Matemática I

Cálculo Integral (parte I)

Engenharia de Telecomunicações e Informática

Teresa Araújo
Departamento de Matemática

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Exemplo 2: $\int \sqrt[3]{x+1} dx$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Exemplo 2: $\int \sqrt[3]{x+1} dx = \int (x+1)^{1/3} \cdot 1 dx$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Exemplo 2: $\int \sqrt[3]{x+1} dx = \int (x+1)^{1/3} \cdot 1 dx =$
 $\frac{1}{\frac{1}{3}+1} (x+1)^{1/3+1} + C$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Exemplo 2: $\int \sqrt[3]{x+1} dx = \int (x+1)^{1/3} \cdot 1 dx =$
 $\frac{1}{\frac{1}{3}+1} (x+1)^{1/3+1} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + C$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Exemplo 2: $\int \sqrt[3]{x+1} dx = \int (x+1)^{1/3} \cdot 1 dx =$
 $\frac{1}{\frac{1}{3}+1} (x+1)^{1/3+1} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + C$

Exemplo 3: $\int \sqrt[4]{2x+5} dx$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Exemplo 2: $\int \sqrt[3]{x+1} dx = \int (x+1)^{1/3} \cdot 1 dx =$
 $\frac{1}{\frac{1}{3}+1} (x+1)^{1/3+1} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + C$

Exemplo 3: $\int \sqrt[4]{2x+5} dx = \int (2x+5)^{1/4} \cdot \color{red}{2} \cdot \color{red}{\frac{1}{2}} dx$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Exemplo 2: $\int \sqrt[3]{x+1} dx = \int (x+1)^{1/3} \cdot 1 dx =$
 $\frac{1}{\frac{1}{3}+1} (x+1)^{1/3+1} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + C$

Exemplo 3: $\int \sqrt[4]{2x+5} dx = \int (2x+5)^{1/4} \cdot \color{red}{2} \cdot \color{red}{\frac{1}{2}} dx =$
 $\color{red}{\frac{1}{2}} \int (2x+5)^{1/4} \cdot \color{red}{2} dx$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Exemplo 2: $\int \sqrt[3]{x+1} dx = \int (x+1)^{1/3} \cdot 1 dx =$
 $\frac{1}{\frac{1}{3}+1} (x+1)^{1/3+1} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + C$

Exemplo 3: $\int \sqrt[4]{2x+5} dx = \int (2x+5)^{1/4} \cdot \color{red}{2} \cdot \color{red}{\frac{1}{2}} dx =$
 $\color{red}{\frac{1}{2}} \int (2x+5)^{1/4} \cdot \color{red}{2} dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{4}+1} (2x+5)^{1/4+1} + C$

$$\int u^m \cdot u' dx = \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$

Exemplo 1: $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

Exemplo 2: $\int \sqrt[3]{x+1} dx = \int (x+1)^{1/3} \cdot 1 dx =$
 $\frac{1}{\frac{1}{3}+1} (x+1)^{1/3+1} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + C$

Exemplo 3: $\int \sqrt[4]{2x+5} dx = \int (2x+5)^{1/4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} dx =$
 $\frac{1}{2} \int (2x+5)^{1/4} \cdot 2 dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{4}+1} (2x+5)^{1/4+1} + C = \frac{2}{5} \sqrt[4]{(2x+5)^5} + C$

$$\int a^u \cdot u' dx = \frac{1}{\ln(a)} a^u + C$$

$$\int a^u \cdot u' dx = \frac{1}{\ln(a)} a^u + C$$

Exemplo 4: $\int 2^x dx$

$$\int a^u \cdot u' dx = \frac{1}{\ln(a)} a^u + C$$

Exemplo 4: $\int 2^x dx = \frac{1}{\ln(2)} 2^x + C$

$$\int a^u \cdot u' dx = \frac{1}{\ln(a)} a^u + C$$

Exemplo 4: $\int 2^x dx = \frac{1}{\ln(2)} 2^x + C$

Exemplo 5:

$$\int x 3^{x^2} dx$$

$$\int a^u \cdot u' dx = \frac{1}{\ln(a)} a^u + C$$

Exemplo 4: $\int 2^x dx = \frac{1}{\ln(2)} 2^x + C$

Exemplo 5:

$$\int x 3^{x^2} dx = \int 2 \cdot \frac{1}{2} x 3^{x^2} dx$$

$$\int a^u \cdot u' dx = \frac{1}{\ln(a)} a^u + C$$

Exemplo 4: $\int 2^x dx = \frac{1}{\ln(2)} 2^x + C$

Exemplo 5:

$$\int x 3^{x^2} dx = \int 2 \cdot \frac{1}{2} x 3^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x 3^{x^2} dx$$

$$\int a^u \cdot u' dx = \frac{1}{\ln(a)} a^u + C$$

Exemplo 4: $\int 2^x dx = \frac{1}{\ln(2)} 2^x + C$

Exemplo 5:

$$\int x 3^{x^2} dx = \int 2 \cdot \frac{1}{2} x 3^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x 3^{x^2} dx = \frac{1}{2 \ln(3)} 3^{x^2} + C$$

$$\int \frac{1}{u} \cdot u' dx = \ln |u| + C$$

$$\int \frac{1}{u} \cdot u' dx = \ln |u| + C$$

Exemplo 6: $\int \frac{1}{x+1} dx$

$$\int \frac{1}{u} \cdot u' dx = \ln |u| + C$$

Exemplo 6: $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1| + C$

$$\int \frac{1}{u} \cdot u' dx = \ln |u| + C$$

Exemplo 6: $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1| + C$

Exemplo 7: $\int \frac{x^3}{x^4+3} dx$

$$\int \frac{1}{u} \cdot u' dx = \ln |u| + C$$

Exemplo 6: $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1| + C$

Exemplo 7: $\int \frac{x^3}{x^4+3} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4+3} dx$

$$\int \frac{1}{u} \cdot u' dx = \ln |u| + C$$

Exemplo 6: $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1| + C$

Exemplo 7: $\int \frac{x^3}{x^4+3} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4+3} dx = \frac{1}{4} \ln |x^4+3| + C$

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

Exemplos 6, 5 e 2:

$$\int \left(\frac{1}{x+1} + x 3^{x^2} + \sqrt[3]{x+1} \right) dx$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

Exemplos 6, 5 e 2:

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{1}{x+1} + x 3^{x^2} + \sqrt[3]{x+1} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x+1} dx + \int x 3^{x^2} dx + \int \sqrt[3]{x+1} dx \end{aligned}$$

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

Exemplos 6, 5 e 2:

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{1}{x+1} + x 3^{x^2} + \sqrt[3]{x+1} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x+1} dx + \int x 3^{x^2} dx + \int \sqrt[3]{x+1} dx \\ &= \ln|x+1| + \frac{1}{2 \ln(3)} 3^{x^2} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} + C \end{aligned}$$

Integração por Substituição

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$.

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analizando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$.
Assim, escolhemos efectuar a mudança de variável $t = \sqrt{2x-1}$.

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analizando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$. Assim, escolhemos efectuar a mudança de variável $t = \sqrt{2x-1}$. Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos

$$2x - 1 = t^2$$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analizando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$. Assim, escolhemos efectuar a mudança de variável $t = \sqrt{2x-1}$. Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos

$$2x - 1 = t^2 \Leftrightarrow 2x = t^2 + 1,$$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analizando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$. Assim, escolhemos efectuar a mudança de variável $t = \sqrt{2x-1}$.

Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos

$$2x - 1 = t^2 \Leftrightarrow 2x = t^2 + 1, \text{ pelo que } x = \frac{t^2 + 1}{2}.$$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$. Assim, escolhemos efectuar a mudança de variável $t = \sqrt{2x-1}$. Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos

$$2x - 1 = t^2 \Leftrightarrow 2x = t^2 + 1, \text{ pelo que } x = \frac{t^2 + 1}{2}.$$

A diferencial é então $dx = g'(t) dt = \frac{dx}{dt} dt = t dt$.

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$. Assim, escolhemos efectuar a mudança de variável $t = \sqrt{2x-1}$. Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos

$$2x - 1 = t^2 \Leftrightarrow 2x = t^2 + 1, \text{ pelo que } x = \frac{t^2 + 1}{2}.$$

A diferencial é então $dx = g'(t) dt = \frac{dx}{dt} dt = t dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{2} \cdot t} \cdot t dt$$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$. Assim, escolhemos efectuar a mudança de variável $t = \sqrt{2x-1}$. Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos

$$2x - 1 = t^2 \Leftrightarrow 2x = t^2 + 1, \text{ pelo que } x = \frac{t^2 + 1}{2}.$$

A diferencial é então $dx = g'(t) dt = \frac{dx}{dt} dt = t dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{2} \cdot t} \cdot t dt = \int \frac{2}{t^2 + 1} dt$$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$. Assim, escolhemos efectuar a mudança de variável $t = \sqrt{2x-1}$. Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos

$$2x - 1 = t^2 \Leftrightarrow 2x = t^2 + 1, \text{ pelo que } x = \frac{t^2 + 1}{2}.$$

A diferencial é então $dx = g'(t) dt = \frac{dx}{dt} dt = t dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{2} \cdot t} \cdot t dt = \int \frac{2}{t^2 + 1} dt = 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

Integração por Substituição

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$. Assim, escolhemos efectuar a mudança de variável $t = \sqrt{2x-1}$.

Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos

$$2x - 1 = t^2 \Leftrightarrow 2x = t^2 + 1, \text{ pelo que } x = \frac{t^2 + 1}{2}.$$

A diferencial é então $dx = g'(t) dt = \frac{dx}{dt} dt = t dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{2} \cdot t} \cdot t dt = \int \frac{2}{t^2 + 1} dt = 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = 2 \operatorname{arctg}(t) + C$$

Integração por Substituição

Exemplo 1: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção o radical $\sqrt{2x-1}$. Assim, escolhemos efectuar a mudança de variável $t = \sqrt{2x-1}$. Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos

$$2x - 1 = t^2 \Leftrightarrow 2x = t^2 + 1, \text{ pelo que } x = \frac{t^2 + 1}{2}.$$

A diferencial é então $dx = g'(t) dt = \frac{dx}{dt} dt = t dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{2} \cdot t} \cdot t dt = \int \frac{2}{t^2 + 1} dt = 2 \int \frac{1}{t^2 + 1} dt = 2 \arctg(t) + C$$

Voltando à variável inicial x , vem $I = 2 \arctg(\sqrt{2x-1}) + C$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção a expressão $\ln(x)$.

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx$

Analizando o integral, chama-nos a atenção a expressão $\ln(x)$. Assim, decidimos efectuar a mudança de variável $\ln(x) = t$.

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção a expressão $\ln(x)$.

Assim, decidimos efectuar a mudança de variável $\ln(x) = t$.

Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos $x = e^t$.

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção a expressão $\ln(x)$.

Assim, decidimos efectuar a mudança de variável $\ln(x) = t$.

Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos $x = e^t$.

A diferencial é então $dx = \frac{dx}{dt} dt = e^t dt$.

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção a expressão $\ln(x)$.

Assim, decidimos efectuar a mudança de variável $\ln(x) = t$.

Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos $x = e^t$.

A diferencial é então $dx = \frac{dx}{dt} dt = e^t dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1 + t^2}{e^t \cdot t} \cdot e^t dt$$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção a expressão $\ln(x)$.

Assim, decidimos efectuar a mudança de variável $\ln(x) = t$.

Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos $x = e^t$.

A diferencial é então $dx = \frac{dx}{dt} dt = e^t dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1 + t^2}{e^t \cdot t} \cdot e^t dt = \int \frac{1 + t^2}{t} dt$$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção a expressão $\ln(x)$.

Assim, decidimos efectuar a mudança de variável $\ln(x) = t$.

Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos $x = e^t$.

A diferencial é então $dx = \frac{dx}{dt} dt = e^t dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1 + t^2}{e^t \cdot t} \cdot e^t dt = \int \frac{1 + t^2}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} + t \right) dt$$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção a expressão $\ln(x)$.

Assim, decidimos efectuar a mudança de variável $\ln(x) = t$.

Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos $x = e^t$.

A diferencial é então $dx = \frac{dx}{dt} dt = e^t dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1 + t^2}{e^t \cdot t} \cdot e^t dt = \int \frac{1 + t^2}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} + t \right) dt = \ln |t| + \frac{t^2}{2} + C$$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \frac{1 + \ln^2(x)}{x \ln(x)} dx$

Analisando o integral, chama-nos a atenção a expressão $\ln(x)$.

Assim, decidimos efectuar a mudança de variável $\ln(x) = t$.

Resolvendo a igualdade anterior em ordem a x , temos $x = e^t$.

A diferencial é então $dx = \frac{dx}{dt} dt = e^t dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1 + t^2}{e^t \cdot t} \cdot e^t dt = \int \frac{1 + t^2}{t} dt = \int \left(\frac{1}{t} + t \right) dt = \ln |t| + \frac{t^2}{2} + C$$

Voltando à variável inicial x , vem

$$I = \ln |\ln(x)| + \frac{1}{2} \ln^2(x) + C$$

Substituições Trigonômétricas

Se $u = u(x)$

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - u^2}\right) dx \qquad u = a \sin(t)$$

com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Substituições Trigonométricas

Se $u = u(x)$

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - u^2}\right) dx \quad u = a \sin(t)$$

com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 + u^2}\right) dx \quad u = a \tan(t)$$

com $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Substituições Trigonométricas

Se $u = u(x)$

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - u^2}\right) dx \quad u = a \operatorname{sen}(t)$$

com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 + u^2}\right) dx \quad u = a \operatorname{tg}(t)$$

com $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\int f\left(x, \sqrt{u^2 - a^2}\right) dx \quad u = a \operatorname{sec}(t)$$

com $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1-x^2} =$$

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} =$$

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} =$$

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| =$$

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$$

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \cdot \cos(t) dt$$

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \cdot \cos(t) dt = \int \sin(t) dt$$

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \cdot \cos(t) dt = \int \sin(t) dt = -\cos(t) + C$$

Integração por Substituição Trigonométrica

Exemplo 3: Calcular $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{\sin(t)}{\cos(t)} \cdot \cos(t) dt = \int \sin(t) dt = -\cos(t) + C$$

Voltando à variável inicial x , vem

$$I = -\sqrt{1-x^2} + C$$

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} =$$

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} =$$

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{4\sec^2(t)} =$$

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{4\sec^2(t)} = 2|\sec(t)| =$$

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{4\sec^2(t)} = 2|\sec(t)| = 2\sec(t)$$

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{4\sec^2(t)} = 2|\sec(t)| = 2\sec(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = 2\sec^2(t) dt$.

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{4\sec^2(t)} = 2|\sec(t)| = 2\sec(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = 2\sec^2(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}(t) \cdot 2\sec(t)} \cdot 2\sec^2(t) dt$$

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{4\sec^2(t)} = 2|\sec(t)| = 2\sec(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = 2\sec^2(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}(t) \cdot 2\sec(t)} \cdot 2\sec^2(t) dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{tg}(t)} \cdot \sec(t) dt$$

Integração por Substituição

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{4\sec^2(t)} = 2|\sec(t)| = 2\sec(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = 2\sec^2(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2\operatorname{tg}(t) \cdot 2\sec(t)} \cdot 2\sec^2(t) dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{tg}(t)} \cdot \sec(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} \cdot \frac{1}{\cos(t)} dt \end{aligned}$$

Integração por Substituição

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{4\sec^2(t)} = 2|\sec(t)| = 2\sec(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = 2\sec^2(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2\operatorname{tg}(t) \cdot 2\sec(t)} \cdot 2\sec^2(t) dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{tg}(t)} \cdot \sec(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos(t)}{\operatorname{sen}(t)} \cdot \frac{1}{\cos(t)} dt = \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec}(t) dt \end{aligned}$$

Integração por Substituição

Exemplo 4: Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 + u^2}$, com $a = 2$ e $u = x$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, com $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4(1+\operatorname{tg}^2(t))} = \sqrt{4\sec^2(t)} = 2|\sec(t)| = 2\sec(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = 2\sec^2(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2\operatorname{tg}(t) \cdot 2\sec(t)} \cdot 2\sec^2(t) dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{tg}(t)} \cdot \sec(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)} \cdot \frac{1}{\cos(t)} dt = \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec}(t) dt = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec}(t) - \cotg(t)| + C \end{aligned}$$

Exemplo 4: (continuação) Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

Exemplo 4: (continuação) Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

Para voltar à variável inicial x , precisamos de escrever $\operatorname{cosec}(t)$ e $\cotg(t)$ como funções de x .

Exemplo 4: (continuação) Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

Para voltar à variável inicial x , precisamos de escrever $\operatorname{cosec}(t)$ e $\cotg(t)$ como funções de x .

Uma vez que $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, temos $\operatorname{tg}(t) = \frac{x}{2}$ e $\cotg(t) = \frac{2}{x}$.

Exemplo 4: (continuação) Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

Para voltar à variável inicial x , precisamos de escrever $\operatorname{cosec}(t)$ e $\cotg(t)$ como funções de x .

Uma vez que $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, temos $\operatorname{tg}(t) = \frac{x}{2}$ e $\cotg(t) = \frac{2}{x}$.

Sabemos que $1 + \cotg^2(t) = \operatorname{cosec}^2(t)$, de onde

$$\operatorname{cosec}(t) = \sqrt{1 + \cotg^2(t)}$$

Exemplo 4: (continuação) Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

Para voltar à variável inicial x , precisamos de escrever $\operatorname{cosec}(t)$ e $\cotg(t)$ como funções de x .

Uma vez que $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, temos $\operatorname{tg}(t) = \frac{x}{2}$ e $\cotg(t) = \frac{2}{x}$.

Sabemos que $1 + \cotg^2(t) = \operatorname{cosec}^2(t)$, de onde

$$\operatorname{cosec}(t) = \sqrt{1 + \cotg^2(t)} = \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}$$

Exemplo 4: (continuação) Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

Para voltar à variável inicial x , precisamos de escrever $\operatorname{cosec}(t)$ e $\cotg(t)$ como funções de x .

Uma vez que $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, temos $\operatorname{tg}(t) = \frac{x}{2}$ e $\cotg(t) = \frac{2}{x}$.

Sabemos que $1 + \cotg^2(t) = \operatorname{cosec}^2(t)$, de onde

$$\operatorname{cosec}(t) = \sqrt{1 + \cotg^2(t)} = \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x^2}}$$

Exemplo 4: (continuação) Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

Para voltar à variável inicial x , precisamos de escrever $\operatorname{cosec}(t)$ e $\cotg(t)$ como funções de x .

Uma vez que $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, temos $\operatorname{tg}(t) = \frac{x}{2}$ e $\cotg(t) = \frac{2}{x}$.

Sabemos que $1 + \cotg^2(t) = \operatorname{cosec}^2(t)$, de onde

$$\operatorname{cosec}(t) = \sqrt{1 + \cotg^2(t)} = \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x^2}} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x}$$

Integração por Substituição

Exemplo 4: (continuação) Calcular $I = \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}} dx$

Para voltar à variável inicial x , precisamos de escrever $\operatorname{cosec}(t)$ e $\cotg(t)$ como funções de x .

Uma vez que $x = 2 \operatorname{tg}(t)$, temos $\operatorname{tg}(t) = \frac{x}{2}$ e $\cotg(t) = \frac{2}{x}$.

Sabemos que $1 + \cotg^2(t) = \operatorname{cosec}^2(t)$, de onde

$$\operatorname{cosec}(t) = \sqrt{1 + \cotg^2(t)} = \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 4}{x^2}} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x}$$

Substituindo no integral vem

$$I = \frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec}(t) - \cotg(t)| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x} - \frac{2}{x} \right| + C$$

Exemplo 5: Calcular $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

Integração por Substituição

Exemplo 5: Calcular $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Integração por Substituição

Exemplo 5: Calcular $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nesta situação, temos

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

Integração por Substituição

Exemplo 5: Calcular $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nesta situação, temos

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Integração por Substituição

Exemplo 5: Calcular $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nesta situação, temos

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{\sin^2(t) + 1}{\sin^2(t) \cos(t)} \cdot \cos(t) dt$$

Integração por Substituição

Exemplo 5: Calcular $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Nesta situação, temos

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$I = \int \frac{\sin^2(t) + 1}{\sin^2(t) \cos(t)} \cdot \cos(t) dt = \int \left(1 + \frac{1}{\sin^2(t)}\right) dt$$

Integração por Substituição

Exemplo 5: Calcular $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2(t) + 1}{\sin^2(t) \cos(t)} \cdot \cos(t) dt = \int \left(1 + \frac{1}{\sin^2(t)}\right) dt \\ &= \int (1 + \operatorname{cosec}^2(t)) dt \end{aligned}$$

Integração por Substituição

Exemplo 5: Calcular $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2(t) + 1}{\sin^2(t) \cos(t)} \cdot \cos(t) dt = \int \left(1 + \frac{1}{\sin^2(t)}\right) dt \\ &= \int (1 + \operatorname{cosec}^2(t)) dt = t - \cotg(t) + C \end{aligned}$$

Integração por Substituição

Exemplo 5: Calcular $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx$

O integral contém um radical da forma $\sqrt{a^2 - u^2}$, com $u = x$ e $a = 1$, pelo que a mudança de variável a utilizar é $x = \sin(t)$, com $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nesta situação, temos

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

A diferencial é $dx = \frac{dx}{dt} dt = \cos(t) dt$.

Substituindo no integral, vem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2(t) + 1}{\sin^2(t) \cos(t)} \cdot \cos(t) dt = \int \left(1 + \frac{1}{\sin^2(t)}\right) dt \\ &= \int (1 + \operatorname{cosec}^2(t)) dt = t - \cotg(t) + C \end{aligned}$$

Voltando à variável inicial x , vem

$$I = \arcsen(x) - \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + C$$

Integração por Partes

Exemplo 1: Calcular $I = \int \ln(x) dx$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \ln(x) dx$

$$\int \underbrace{u'}_{\text{integra}} \cdot \underbrace{v}_{\text{deriva}} dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \ln(x) dx$

$$\int \underbrace{u'}_{\text{integra}} \cdot \underbrace{v}_{\text{deriva}} dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

$$\int \underbrace{1}_{\text{integra}} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{\text{deriva}} dx = \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_v dx$$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \ln(x) dx$

$$\int \underbrace{u'}_{\text{integra}} \cdot \underbrace{v}_{\text{deriva}} dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{1}_{\text{integra}} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{\text{deriva}} dx &= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_v dx \\ &= \underbrace{x}_u \underbrace{\ln(x)}_v - \int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx \end{aligned}$$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \ln(x) dx$

$$\int \underbrace{u'}_{\text{integra}} \cdot \underbrace{v}_{\text{deriva}} dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{1}_{\text{integra}} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{\text{deriva}} dx &= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_v dx \\ &= \underbrace{x}_u \underbrace{\ln(x)}_v - \int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx \\ &= x \ln(x) - \int 1 dx \end{aligned}$$

Exemplo 1: Calcular $I = \int \ln(x) dx$

$$\int \underbrace{u'}_{\text{integra}} \cdot \underbrace{v}_{\text{deriva}} dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{1}_{\text{integra}} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{\text{deriva}} dx &= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_v dx \\ &= \underbrace{x}_u \underbrace{\ln(x)}_v - \int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx \\ &= x \ln(x) - \int 1 dx \\ &= x \ln(x) - x + C \end{aligned}$$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \arcsen(x) dx$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \arcsen(x) dx$

$$\int \arcsen(x) dx = \int 1 \cdot \arcsen(x) dx$$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \arcsen(x) dx$

$$\begin{aligned}\int \arcsen(x) dx &= \int 1 \cdot \arcsen(x) dx \\ &= x \cdot \arcsen(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx\end{aligned}$$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \arcsen(x) dx$

$$\begin{aligned}\int \arcsen(x) dx &= \int 1 \cdot \arcsen(x) dx \\ &= x \cdot \arcsen(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \cdot \arcsen(x) - \int x \cdot (1-x^2)^{-1/2} dx\end{aligned}$$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \arcsen(x) dx$

$$\begin{aligned}\int \arcsen(x) dx &= \int 1 \cdot \arcsen(x) dx \\&= x \cdot \arcsen(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= x \cdot \arcsen(x) - \int x \cdot (1-x^2)^{-1/2} dx \\&= x \cdot \arcsen(x) + \frac{1}{2} \int (-2x) \cdot (1-x^2)^{-1/2} dx\end{aligned}$$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \arcsen(x) dx$

$$\begin{aligned}\int \arcsen(x) dx &= \int 1 \cdot \arcsen(x) dx \\&= x \cdot \arcsen(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= x \cdot \arcsen(x) - \int x \cdot (1-x^2)^{-1/2} dx \\&= x \cdot \arcsen(x) + \frac{1}{2} \int (-2x) \cdot (1-x^2)^{-1/2} dx \\&= x \cdot \arcsen(x) + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C\end{aligned}$$

Exemplo 2: Calcular $I = \int \arcsen(x) dx$

$$\begin{aligned}\int \arcsen(x) dx &= \int 1 \cdot \arcsen(x) dx \\&= x \cdot \arcsen(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\&= x \cdot \arcsen(x) - \int x \cdot (1-x^2)^{-1/2} dx \\&= x \cdot \arcsen(x) + \frac{1}{2} \int (-2x) \cdot (1-x^2)^{-1/2} dx \\&= x \cdot \arcsen(x) + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C \\&= x \cdot \arcsen(x) + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

Exemplo 3: Calcular $I = \int x^2 \cdot \cos(2x) dx$

Exemplo 3: Calcular $I = \int x^2 \cdot \cos(2x) dx$

Por vezes temos dúvidas sobre qual a função que devemos escolher para integrar (ou derivar).

Exemplo 3: Calcular $I = \int x^2 \cdot \cos(2x) dx$

Por vezes temos dúvidas sobre qual a função que devemos escolher para integrar (ou derivar). Escolhendo x^2 para integrar e $\cos(2x)$ para derivar, temos

$$\begin{array}{ll} u' = x^2 & u = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \\ v = \cos(2x) & v' = -2 \sin(2x) \end{array}$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\cos(x)}_v dx = \frac{x^3}{3} \cdot \cos(2x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot (-2 \sin(2x)) dx$$

Exemplo 3: Calcular $I = \int x^2 \cdot \cos(2x) dx$

Por vezes temos dúvidas sobre qual a função que devemos escolher para integrar (ou derivar). Escolhendo x^2 para integrar e $\cos(2x)$ para derivar, temos

$$\begin{array}{ll} u' = x^2 & u = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \\ v = \cos(2x) & v' = -2 \sin(2x) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_{u'} \cdot \underbrace{\cos(x)}_v dx &= \frac{x^3}{3} \cdot \cos(2x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot (-2 \sin(2x)) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \cos(2x) + \underbrace{\frac{2}{3} \int x^3 \cdot \sin(2x) dx}_{\text{mais complexo}} \end{aligned}$$

Exemplo 3: (continuação)

Exemplo 3: (continuação)

Invertendo a escolha anterior, ou seja, escolhendo x^2 para derivar e $\cos(2x)$ para integrar, temos

$$\begin{array}{ll} u' = \cos(2x) & u = \int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C \\ v = x^2 & v' = 2x \end{array}$$

$$\int \underbrace{x^2}_v \cdot \underbrace{\cos(2x)}_{u'} dx = \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot x^2 - \int \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot 2x dx$$

Exemplo 3: (continuação)

Invertendo a escolha anterior, ou seja, escolhendo x^2 para derivar e $\cos(2x)$ para integrar, temos

$$\begin{array}{ll} u' = \cos(2x) & u = \int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C \\ v = x^2 & v' = 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_v \cdot \underbrace{\cos(2x)}_{u'} dx &= \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot x^2 - \int \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin(2x) - \underbrace{\int x \cdot \sin(2x) dx}_{I_1} \end{aligned}$$

Exemplo 3: (continuação)

Invertendo a escolha anterior, ou seja, escolhendo x^2 para derivar e $\cos(2x)$ para integrar, temos

$$\begin{array}{ll} u' = \cos(2x) & u = \int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x) + C \\ v = x^2 & v' = 2x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_v \cdot \underbrace{\cos(2x)}_{u'} dx &= \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot x^2 - \int \frac{1}{2} \sin(2x) \cdot 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin(2x) - \underbrace{\int x \cdot \sin(2x) dx}_{I_1} \end{aligned}$$

Exemplo 3: (continuação)

Para calcular $I_1 = \int x \cdot \sin(2x) dx$ temos de novo de integrar por partes.

Exemplo 3: (continuação)

Para calcular $I_1 = \int x \cdot \sin(2x) dx$ temos de novo de integrar por partes.

Escolhendo $\sin(2x)$ para integrar e x para derivar, temos

$$\begin{array}{ll} u' = \sin(2x) & u = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C \\ v = x & v' = 1 \end{array}$$

Exemplo 3: (continuação)

Para calcular $I_1 = \int x \cdot \sin(2x) dx$ temos de novo de integrar por partes. Escolhendo $\sin(2x)$ para integrar e x para derivar, temos

$$\begin{array}{ll} u' = \sin(2x) & u = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C \\ v = x & v' = 1 \end{array}$$

$$I_1 = \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{u'} dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot x - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot 1 dx$$

Exemplo 3: (continuação)

Para calcular $I_1 = \int x \cdot \sin(2x) dx$ temos de novo de integrar por partes. Escolhendo $\sin(2x)$ para integrar e x para derivar, temos

$$\begin{array}{ll} u' = \sin(2x) & u = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C \\ v = x & v' = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_1 = \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{u'} dx &= -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot x - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot 1 dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx \end{aligned}$$

Exemplo 3: (continuação)

Para calcular $I_1 = \int x \cdot \sin(2x) dx$ temos de novo de integrar por partes. Escolhendo $\sin(2x)$ para integrar e x para derivar, temos

$$\begin{array}{ll} u' = \sin(2x) & u = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C \\ v = x & v' = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_1 = \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{u'} dx &= -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot x - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot 1 dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C \end{aligned}$$

Exemplo 3: (continuação)

Para calcular $I_1 = \int x \cdot \sin(2x) dx$ temos de novo de integrar por partes. Escolhendo $\sin(2x)$ para integrar e x para derivar, temos

$$\begin{array}{ll} u' = \sin(2x) & u = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + C \\ v = x & v' = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_1 = \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{\sin(2x)}_{u'} dx &= -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot x - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot 1 dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C \end{aligned}$$

Exemplo 3: (continuação)

$$\int x^2 \cdot \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) - I_1$$

Exemplo 3: (continuação)

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \cos(2x) dx &= \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) - I_1 \\ &= \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) - \left(-\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) \right)\end{aligned}$$

Exemplo 3: (continuação)

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \cos(2x) dx &= \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) - I_1 \\ &= \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) - \left(-\frac{1}{2}x \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x) \right) \\ &= \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) + \frac{1}{2}x \cos(2x) - \frac{1}{4} \sin(2x) + C\end{aligned}$$